View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by DSpace at Belgorod State University

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 514.76
DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-465-474

ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ В ГЕОМЕТРИИ η-ЭЙНШТЕЙНОВЫХ СУБРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ С N-СВЯЗНОСТЬЮ

GOLDEN RATION IN GEOMETRY OF η-EINSTEIN SUB-RIEMANNIAN MANIFOLDS WITH N-CONNECTION

С.В. Галаев
S.V. Galaev

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012, Россия

National Research Saratov State University named after G.N. Chernyshevsky,
83 Astrahanskaya St, Saratov, 410012, Russia

E-mail: sgalaev@mail.ru

Аннотация
Вводится понятие специального субриманова многообразия (S-многообразия). S-многообразие — это субриманово многообразие M контактного типа с заданной на нем ассоциированной связностью ∇^A относительно которой структурный эндоморфизм Ψ многообразия M, определяемый равенством $\omega(\vec{x},\vec{y}) = g(\Psi\vec{x},\vec{y})$, ковариантно постоянен. Доказывается, что S-многообразие является η-Эйнштейновым многообразием тогда и только тогда, когда оно η-Эйнштейново относительно связности ∇^N, где N-эндоморфизм $N : D \to D$ распределения D многообразия M такой, что $\nabla^A N = 0$. В качестве примера эндоморфизма, удовлетворяющего условию $\nabla^A N = 0$, рассматривается эндоморфизм $N = \frac{\sqrt{5}}{2}F + \frac{1}{2}I$, удовлетворяющий тем самым соотношению $N^2 = N+1$.

Abstract
The paper deals with a sub-Riemannian manifold M of contact type with a given associated connection ∇^A. Additionally it is assumed that the structure endomorphism Ψ defined by the equality $\omega(\vec{x},\vec{y}) = g(\Psi\vec{x},\vec{y})$ is covariantly constsnt with respect to the connection ∇^A. The obtained sub-Riemannian manifold is an analog of a Sasaki manifold. It is proved that the manifold M is η-Einstein if and only if it is η-Einstein with respect to the connection ∇^N, where $N : D \to D$ is an endomorphism of the distribution D of the manifold M such that $\nabla^A N = 0$. Let η be a 1-form defining the distribution D of the manifold M. If $rk(d\eta) = 2p$, $2p < n-1$, $2p \neq 0$, where n is the dimension of the manifold M, on the sub-Riemannian manifold may be defined in a natural way an endomorphism N satisfying $N^2 = N+1$ that is called a golden affinor structure. It is shown that the endomorphism N is covariantly constant

with respect to the connection ∇^A. As the central example, is considered the distribution D of a sub-Riemannian manifold M with zero Schouten tensor. The distribution D of the manifold M is itself a sub-Riemannian manifold with a golden affinor structure.

Ключевые слова: субриманово многообразие, внутренняя связность, ассоциированная связность, N-связность, η-Эйнштейново многообразие, золотое сечение.
Keywords: sub-Riemannian manifold; interior connection; associated connection; N-connection; η-Einstein manifold; golden ration.

1. Введение

Субримановым многообразием контактного типа называется риманово многообразие M размерности n, оснащенное субримановой структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, g)$, где η и $\vec{\xi}$ 1-форма и единичное векторное ноле, порождающие, соответственно, ортогональные между собой распределения D и $D^{\perp}$. На многообразиях с почти контактной метрической структурой наряду со связностью Леви-Чивита рассматривают связности с кручением [Галаев 2016; Гордеева 2009; Agricola 2015; Agricola 2014]. Эти связности могут быть как метрическими, так и неметрическими. Как правило, выбор подходящей связности связан с возможными приложениями почти контактных метрических структур в теоретической физике. В конце статьи предлагается краткий обзор наиболее часто используемых связностей с кручением. Субриманово многообразие является обобщением почти контактного метрического многообразия. На субримановом многообразии контактного типа определяется структурный эндоморфизм Ψ с помощью равенства $\omega(\vec{x}, \vec{y}) = g(\Psi\vec{x}, \vec{y})$. Если почти контактное метрическое многообразие представляет собой интерес как обобщение поверхности эрмитова пространства, то мотивация к исследованию субриманова многообразия вызвана необходимостью построения математических моделей в задачах теории управления и неголономной механики. Различие в происхождении почти контактных метрических многообразий и субримановых многообразий проявляется в выборе связностей, задающих параллельный перенос на многообразиях. Для почти контактных метрических многообразий, образующих специальный класс римановых многообразий, естественным является выбор связности Леви-Чивита. В геометрии субримановых многообразий используются связности, обеспечивающие параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых. В работах автора соответствующие связности определяются парой (∇, N), где ∇ — внутренняя метрическая связность, а $N : D \to D$ — подходящий эндоморфизм распределения D. В случае субриманова многообразия естественно положить $N = \Psi$. В настоящей работе изучаются два эндоморфизма N, естественным образом возникающих на субримановом многообразии M : структурный эндоморфизм Ψ и эндоморфизм N, удовлетворяющий полиноминальному соотношению: $N^2 = N + 1$. Следуя устоявшимся традициям [Falcon 2009, Falcon 2008], будем называть эндоморфизм, удовлетворяющий последнему соотношению, золотой аффинорной структурой. В случае нулевого эндоморфизма ($N = 0$) N-связность получает название ассоциированной (с внутренней связностью) связности и обозначается ∇^A [Букушева 2017, Bukusheva 2011]. На изучаемое в работе субриманово многообразие M накладываются определенные ограничения. Нри этом многообразие M получает название специального субриманова многообразия, или, короче — S-многообразия. В качестве примера S-многообразия рассматривается распределение D субриманова многообразия с заданной на нем продолженной субримановой структурой.

2. Основные сведения о специальных субримановых многообразиях

Пусть M — риманово многообразие размерности n с заданной на нем субримановой структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, g, D)$, где η и $\vec{\xi}$ 1-форма и единичное векторное ноле, порождающие, соответственно, ортогональные между собой распределения D и $D^{\perp}$. Обычно исследование субримановых многообразий начинают с собственно субримановой структуры $(M, \vec{\xi}, \eta, g, D)$, переходя затем к структуре риманова многообразия, полагая, что $\vec{\xi}$ — единичное векторное поле и распределения D и $D^{\perp}$ ортогональны между собой.

Внутренней линейной связностью ∇ [1-3 Букушева 2019] на субримановом многообразии называется отображение $\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \to \Gamma(D)$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$1)\nabla_{f_1\vec{x}+f_2\vec{y}} = f_1\nabla_{\vec{x}} + f_2\nabla_{\vec{y}},$$

$$2)\nabla_{\vec{x}}f\vec{y} = (\vec{x}f)\vec{y} + f\nabla_{\vec{x}}\vec{y},$$

$$3)\nabla_{\vec{x}}(\vec{y}+\vec{z}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} + \nabla_{\vec{x}}\vec{z},$$

где $\Gamma(D)$ — модуль допустимых векторных полей (векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению D). Известно [Галаев 2016; Галаев 2017; Галаев 2001], что на субрпмановом многообразии существует единственная внутренняя связность ∇ с нулевым кручением, такая, что $\nabla_{\vec{x}}g(\vec{x}, \vec{y}) = 0$. Кручепе внутренней линейной связности S но онределенпю полагается равным

$$S(\vec{x}, \vec{y}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - P[\vec{x}, \vec{y}],$$

где $P : TM \to D$ — проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^{\perp}$.

Тензорное поле, заданное на многообразии M, будем называть допустимым (к распределению D), если его значение в каждой точке многообразия обращается в нуль, еслп среди аргументов встречаются η или $\vec{\xi}$. Любое тензорное поле, не являющееся обязательно допустимым, будем называть голономным полем.

Дополнительно предположим, что $rk(d\eta) = 2p$, $0 < 2p < n-1$. Пусть K — интегрируемое распределение, равное ядру формы $\omega = d\eta$. Помимо разложения $TM = D \oplus D^{\perp}$ на многообразии M возникает разложение $TM = L \oplus L^{\perp} \oplus D^{\perp}$, где $L^{\perp} = K \cap D$, а L — ортогональное ему подраспределенпе распределения D [Галаев 2017]. Кроме того, нам понадобятся разложения $\tilde{L} = L \oplus D^{\perp}$, $K = L^{\perp} \oplus D^{\perp}$, $TM = L \oplus K$. С помощью последнего разложения определяются проекторы $h : TM \to L$, $v : TM \to K$.

Пусть $N : D \to D$ — фиксированный эндоморфизм распределения D. Линейной связностью ∇^N (короче, N-связностью) называется линейная связность с кручением $S(\vec{x}, \vec{y})$, однозначно определяемая следующими условиями [Bukusheva 2011; Galaev 2018; Galaev 2015]:

1) $S(\vec{x}, \vec{y}) = 2\omega(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y} - \eta(\vec{y})N\vec{x}$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(TM)$,
2) $\nabla^N_{\vec{x}}g(\vec{y}, \vec{z}) = 0$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$,
3) $\nabla^N_{\vec{x}}\vec{\xi} = 0$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$,
4) $\nabla^N_{\vec{x}}\eta = 0$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$.

В случае нулевого эндоморфизма N-связность ∇^N будем называть ассоциированной связностью и обозначать ∇^A.

Будем называть многообразие M специальным субримановым многообразием (или, короче — S-многообразием), если выполняются следующие условия:

1) распределение $\tilde{L} = L \oplus D^{\perp}$ — интегрируемо;

2) тензорное поле $\mu(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) = v\vec{z}g(h\vec{x},h\vec{y}) - g(h[v\vec{z},h\vec{x}],h\vec{y}) - g(h[v\vec{z},h\vec{y}],h\vec{x})$ обращается в нуль;

3) структурное поле эндоморфизма Ψ ковариантно постоянно относительно ассоциированной связности: $\nabla^A\Psi = 0$.

Тензорное поле $\mu(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, по-видимому, впервые использовалось в работе [Bejancu 2012].

Пример S-многообразия. Пусть $M = \mathbb{R}^5$. (∂_n) $(\alpha = 1,..,5)$ — стандартный базис арифметического пространства. Определим на M 1-форму η, полагая, $\eta = dx^5 + x^2dx^1$. Пусть $\vec{e}_1 = \partial_1 - x^2\partial_5$. Зададим на M метрический тензор g, полагая, что векторы $(\sqrt{2}\vec{e}_1, \sqrt{2}\partial_2, \sqrt{2}\partial_3, \sqrt{2}\partial_4, \sqrt{2}\partial_5)$ образуют ортонормированный базис. Положим: $L = span(\vec{e}_1,\partial_2)$, $L^{\perp} = span(\partial_3,\partial_4)$. Учитывая равенство $[\vec{e}_1,\partial_2] = \partial_5$, заключаем, что распределение $\tilde{L} = L \oplus D^{\perp}$ интегрируемо. Два других входящих в определение S-многообразия свойства также проверяются непосредственно.

Карту $K(x^{\alpha})$ $(\alpha,\beta,\gamma = 1,...,n; A,B,C = 1,...,n-1; a,b,c,e = 1,...,2p; i,j,k = 2p+1,...,n-1)$ многообразия M будем называть адаптированной к распределению D, если

1) $\partial_n = \vec{\xi}$;

2) $\Gamma(L^{\perp}) =< \partial_i >$;

3) $\Gamma(\tilde{L}) =< \partial_a, \partial_n >$.

Векторные поля $h(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n\partial_n$ порождают систему $L : L = Span(\vec{e}_a)$. Таким образом, мы имеем на многообразии M неголономное поле базисов $(\vec{e}_{\alpha}) = (\vec{e}_a, \partial_i, \partial_n)$. Непосредственно проверяется, что $[\vec{e}_a,\vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$. Условие $\vec{\xi} \in ker\omega$ влечет справедливость равенства $\partial_n\Gamma_a^n = 0$. Пз определения S-многообразия следует, что $\partial_n g_{ab} = 0$, $\partial_i g_{ab} = 0$.

Использование адаптированных координат не только упрощает доказательство теорем, но и в ряде случаев позволяет лучше понять строение изучаемых объектов.

Пусть $\tilde{\nabla}$ — связность Леви-Чивита и $\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ — коэффициенты связности $\tilde{\nabla}$.

Предложение 1 [Букушева 2017; Галаев 2016; Галаев 2001]. *Коэффициенты связности Леви-Чивита субриманова многообразия в адаптированных координатах имеют вид:*

$$\tilde{\Gamma}^C_{AB} = \Gamma^C_{AB},\ \tilde{\Gamma}^n_{AB} = \omega_{BA} - C_{AB},\ \tilde{\Gamma}^B_{An} = \tilde{\Gamma}^B_{nA} = C^B_A + \psi^B_A,\ \tilde{\Gamma}^n_{nA} = \tilde{\Gamma}^a_{nn} = 0,$$

где $\Gamma^A_{BC} = \frac{1}{2}g^{AD}(\vec{e}_B g_{CD} + \vec{e}_C g_{BD} - \vec{e}_D g_{BC})$, $\psi^B_A = g^{BC}\omega_{AC}$, $C_{AB} = \frac{1}{2}\partial_n g_{AB}$, $C^B_A = g^{BC}C_{AC}$.

Пусть, далее, F — поле допустимого эндоморфизма, определяемое разложением $D = L \oplus L^{\perp}$ таким образом, чтобы все векторы пространства L отвечали собственному значению $\lambda = 1$, а векторы $L^{\perp}$ — собственному значению $\lambda = -1$. Пз условий, входящих в определение S-многообразия, вытекает следующее предложение.

Предложение 2. *Поле эндоморфизма F ковариантно постоянно относительно ассоциированной связности:* $\nabla^A F = 0$.

Пусть I — тождественное преобразование распределения D, $I\vec{\xi} = 0$. Эндоморфизм $N = \sqrt{5}F/2 + I/2$ является допустимым эндоморфизмом, удовлетворяющим соотношению $N^2 = N + 1$. При этом равенство $\nabla^A F = 0$ влечет равенство $\nabla^A N = 0$.

Ранее автором были введены понятия допустимого интегрируемого тензорного поля и (допустимого) почти нормального тензорного поля [Galaev 2015]. Допустимое тензорное поле t называется почти нормальным, если $\nabla^A t = 0$.

Коэффициенты связности ∇^N обозначим символами $G^\alpha_{\beta\gamma}$. Из определения N-связности следует, что ненулевые коэффициенты связности ∇^N в адаптированных координатах получают следующее представление:

$$G^A_{BC} = \frac{1}{2} g^{AD}(\vec{e}_B g_{CD} + \vec{e}_C g_{BD} - \vec{e}_D g_{BC}), \ G^B_{nA} = N^B_A.$$

Теорема 1. *Пусть t — почти нормальная аффинорная структура, заданная на S-многообразии. Тогда найдется атлас адаптированных карт, относительно которых компоненты эндоморфизма t постоянны.*

□ Равенство $\nabla^A t = 0$ сводится в адаптированных координатах к равенствам $\nabla_A t^C_B = \partial_A t^C_B + \Gamma^C_{AD} t^D_B - \Gamma^D_{AB} t^C_D = 0$, $\nabla_n t^C_B = \partial_n t^C_B$. Равенство $\partial_A t^C_B + \Gamma^C_{AD} t^D_B - \Gamma^D_{AB} t^C_D = 0$, (с учетом $\partial_n g_{AB} = 0$ и $\partial_n \Gamma^C_{AB} = 0$) можно интерпретировать как равенство, заданное относительно голономной карты. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно воспользоваться следующим утверждением: аффинорная структура интегрируема тогда и только тогда, когда существует сохраняющая ее связность без кручения. ■

Понятие η-Эйнштейнова многообразия введено Окумурой [Гордеева 2009]. η-Эйнштейновым многообразием названо многообразие Сасаки с тензором Риччи $\tilde{r}$, имеющим следующее строение: $\tilde{r} = ag + b\eta \otimes \eta$, $a, b \in \mathbb{R}$. Позже понятие η-Эйнштейнова многообразия было перенесено на более широкий класс почти контактных метрических многообразий. В настоящей работе изучаются η-Эйнштейновы субримановы многообразия. Приводится описание таких многообразий в терминах N-связности. Коэффициенты связности ∇^N обозначим символами $G^\alpha_{\beta\gamma}$.

Непосредственно проверяется справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. *Линейная связность ∇^N, заданная на S-многообразии, является метрической в случае, когда $N = \Psi$, и неметрической, когда $N = \frac{\sqrt{5}}{2} F + \frac{1}{2} I$.*

Используя адаптированные координаты, убеждаемся в справедливости следующего предложения.

Предложение 3. *Для связности Леви-Чивита $\tilde{\nabla}$ и N-связности ∇^N выполняются следующие соотношения:*

$$\nabla^N_{\vec{x}} \vec{y} = \tilde{\nabla}_{\vec{x}} \vec{y} - \eta(\vec{x}) \tilde{\nabla}_{\vec{y}} \vec{\xi} - \eta(\vec{y}) \tilde{\nabla}_{\vec{y}} \vec{\xi} + \omega(\vec{x}, \vec{y}) \vec{\xi} + \eta(\vec{x}) N \vec{y}.$$

Пусть $\tilde{R}(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$, $K(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(TM)$, тензоры кривизны связностей $\tilde{\nabla}$, ∇^N соответственно.

Вычислим необходимые для дальнейшего ненулевые компоненты тензоров $\tilde{R}(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$, $K(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$. Имеем:

$\tilde{R}^D_{ABC} = R^D_{ABC} + \Psi^D_A \omega_{CB} + \Psi^D_B \omega_{AC}$,

$\tilde{R}^n_{AnC} = \partial_n \omega_{AC} + \Psi^E_C \omega_{EA}$,

$\tilde{R}^D_{ABn} = 2\nabla_{[A} \Psi^D_{B|}$,

$\tilde{R}^A_{nCB} = -\nabla_C \Psi^A_B$,

$K^A_{nCB} = -\nabla_C N^A_B$,

$K^D_{ABC} = R^D_{ABC}$.

Здесь $R^D_{ABC} = 2\vec{e}_{[A}\Gamma^D_{B]C} + 2\Gamma^D_{[A||E||}\Gamma^E_{B]C}$ — компоненты тензора кривизны Схоутена [1-3], определяемого равенством

$$R(\vec{x},\vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{y}}\vec{z} - \nabla_{\vec{y}}\nabla_{\vec{x}}\vec{z} - \nabla_{P[\vec{x},\vec{y}]}\vec{z} - P[Q[\vec{x},\vec{y}],\vec{z}],$$

где $Q = 1 - P$.

Заметим, что $\partial_n \omega_{AC} = 0$, т. к. $d\omega = 0$.

Пусть $\tilde{r}(\vec{x},\vec{y})$, $k(\vec{x},\vec{y})$ — соответствующие тензорам $\tilde{R}(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$, $K(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$ тензоры Риччи. Назовем субриманово многообразие η-Эйнштейновым многообразием, если выполняется равенство

$$\tilde{r} = ag + b\eta \otimes \eta, \ \ a, b \in \mathbb{R}.$$

Теорема 3. *Пусть M — S-многообразие. Тогда M является субримановым η-Эйнштейновым многообразием тогда и только тогда, когда M — η-Эйнштейново многообразие относительно связности ∇^N.*

□ Вычислим компоненты тензоров Риччи k, $\tilde{r}$ в адаптированных координатах. Имеем:

$\tilde{r}_{AC} = k_{AC}$, $\tilde{r}_{An} = \tilde{r}_{nA} = -\nabla_B \Psi^B_A$, $\tilde{r}_{nn} = \Psi^B_A \Psi^A_B$, $k_{An} = 0$, $k_{nA} = -\nabla_B N^B_A$, $k_{nn} = 0$.

Пусть M — субриманово η-Эйнштейново многообразие. Из равенства $\tilde{r} = ag + b\eta \otimes \eta$ следует, что

$$\tilde{r}_{An} = \tilde{r}_{nA} = -\nabla_B \Psi^B_A = 0.$$

Из полученного выше равенства $k_{nA} = -\nabla_B N^B_A$ следует, что $k_{An} = k_{nA} = 0$. В свою очередь, воспользовавшись равенством $k_{nn} = 0$, мы можем записать верное равенство $k_{nn} = ag(\partial_n, \partial_n) - a\eta(\partial_n)\eta(\partial_n)$. Что и доказывает первую часть теоремы.

Пусть M — субриманово многообразие, являющееся η-Эйнштейновым многообразием относительно связности ∇^N :

$$k = ag + b\eta \otimes \eta.$$

В этом случае $k_{nA} = -\nabla_b N^B_A = 0$. Если $tr(\psi^2) = b$, $b \in \mathbb{R}$, то справедливо следующее равенство

$$\tilde{r}_{nn} = b = ag(\partial_n, \partial_n) + (b - a)\eta(\partial_n)\eta(\partial_n).$$

Так как $\tilde{r}_{AC} = k_{AC}$, окончательно получаем

$$\tilde{r} = ag + (b - a)\eta \otimes \eta. \quad \blacksquare$$

3. Распределение субриманова многообразия с продолженной структурой

Приведем еще один пример S-многообразия. Пусть D — распределение субриманова многообразия нулевой кривизны [Букушева 2017; Галаев 2009; Bukusheva 2011]. Векторные поля $(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n - \Gamma^b_{ac} x^{n+c} \partial_{n+b}, \partial_n, \partial_{n+a}) = (A_i)$ $(a, b, c = 1, ..., n-1; i, j, k = 2n-1)$ определяют [Bukusheva 2011] на распределении D как на гладком многообразии неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы $(dx^a, \Theta^n = dx^a + \Gamma^n_a dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma^a_{bc} x^{n+c} dx^b)$ — соответствующее поле кобазисов. Имеют место следующие структурные уравнения [Bukusheva 2011]:

$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$,

$[\vec{\varepsilon}_a, \partial_n] = x^{n+d}\partial_n \Gamma^c_{ad} \partial_{n+c}$,

$[\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}] = \Gamma^c_{ab}\partial_{n+c}$.

Определим на многообразии D метрику $\tilde{g}$, подчиняющуюся равенствам:

$$\tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{y}^h) = \tilde{g}(\vec{x}^v, \vec{y}^v) = g(\vec{x}, \vec{y}),\ \tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{y}^v) = \tilde{g}(\vec{x}^h, \partial_n) = \tilde{g}(\vec{x}^v, \partial_n) = 0.$$

Нетрудно установить справедливость следующего предложения.

Предложение 4. *Многообразие D с заданной на нем метрикой $\tilde{g}$ оснащено структурой S-многообразия.*

Замечание 1. Задавая надлежащим образом эндоморфизм $N : D \to D$, получаем следующие классы N-связностей для случая почти контактных метрических многообразий:

1) Связность Бежанку ∇^B с нулевым эндоморфизмом $N = 0$. Бежанку определяет связность ∇^B на почти контактном метрическом многообразии с помощью формулы $\nabla^B_{\vec{x}}\vec{y} = \tilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y} - \eta(\vec{x})\tilde{\nabla}_{\vec{y}}\vec{\xi} - \eta(\vec{y})\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{\xi} + (\omega + c)(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi}$. В адаптированных координатах отличными от нуля компонентами $\Gamma^{B\alpha}_{\beta\gamma}$ связности ∇^B являются $\Gamma^{Ba}_{bc} = \Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$,. В случае многообразия Сасаки тензор кривизны связности Бежанку совпадает с тензором кривизны Схоутена. Построенная Бежанку связность, вообще говоря, не является метрической. Так как $\nabla^B_n g_{ab} = \partial_n g_{ab}$, то метричность связности Бежанку эквивалентна K-контактности контактной метрической структуры. N-связность ∇^N на многообразии с почти контактной метрической структурой с заданным эндоморфизмом $N : D \to D$ может быть определена с помощью равенства $\nabla^N_{\vec{x}}\vec{y} = \nabla^B_{\vec{x}}\vec{y} + \eta(\vec{x})N\vec{y}$.

2) Связность Танака-Вебстера ∇^{TW} определяется как единственная связность, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\nabla^{TW}\eta = 0$,

2) $\nabla^{TW}\vec{\xi} = 0$,

3) $\nabla^{TW}g = 0$,

4) $S(\vec{x}, \vec{y}) = 2\omega(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi}$, $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$,

5) $S(\vec{\xi}, \varphi\vec{x}) = -\varphi S(\vec{\xi}, \vec{x})$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$.

Связность ∇^{TW} является N-связностью в случае, когда $N = C$.

3) Связность Схоутена-ван Кампена ∇^{Sk} определяется с помощью равенства: $\nabla^{Sk}_{\vec{x}}\vec{y} = (\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y}^h)^h + (\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y}^v)^v$, где $\vec{y}^h = p\vec{y}$, $\vec{y}^v = Q\vec{y}$. Непосредственно проверяется, что связность Схоутена-ван Кампена является N-связностью для случая, когда $N = C - \varphi$.

4) φ-связности исследовались в работе [3]. Для K-контактных метрических пространств φ-связность совпадает со связностью Схоутена-ван Кампена.

Замечание 2. В настоящее время продолжают активно изучаться почти контактные метрические многообразия с четверть симметрической связностью. Указанные в замечании 1 связности в весьма частном случае, когда $d\eta = 0$, являются четверть симметрическими связностями.

Заключение

Настоящая работа вносит определенный вклад в развитие геометрии многообразий Римана-Картана [Гордеева 2009; Agricola 2015, 2014], находящей применение в теории гравитации Эйнштейна-Картана. Под многообразием Римана-Картана понимается риманово многообразие с линейной связностью, обладающей ненулевым кручением. Весьма интересной представляется задача классификации N-связностей в зависимости от свойств соответствующих им эндоморфизмов $N : D \to D$. Отдельный интерес представляет изучение N-связностей в случае, когда эндоморфизм $N : D \to D$ принадлежит классу металлических или других подобных структур [Falcon 2009, 2008; Goldberg 1970].

В предлагаемой статье впервые при исследовании субримановых многообразий рассматривается допустимая аффинорная структура, ассоциированная с золотым сечением. Рассматриваемая структура, как легко проверить, совместима с метрическим тензором: $g(N\vec{x},\vec{y}) = g(\vec{x},N\vec{y})$.

Список литературы

1. Букушева А.В. 2015. О геометрии контактных метрических пространств с φ-связностью. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика, 17 (214) (40): 20–24.

2. Букушева А.В. 2016. Изометрические преобразования продолженных почти контактных метрических структур с метрикой полного лифта. Дифференциальная геометрия многообразий фигур, 47: 39–47.

3. Букушева А.В. 2019. Классификация почти контактных метрических структур на распределениях с внутренней симплектической связностью. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика, 51(1): 20–24.

4. Букушева А.В., Галаев С.В. 2017. Геометрия почти контактных гиперкэлеровых многообразий. Дифференциальная геометрия многообразий фигур, 48: 32—41.

   Галаев С.В. 2016. Обобщенный тензор кривизны Вагнера почти контактных метрических пространств. Чебышевский сборник, 3(59) (17): 53–63.

5. Галаев С.В. 2016. Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакиевых многообразий. Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия. Математика. Механика. Информатика, 16(3): 263–272.

6. Галаев С.В. 2017. Почти контактные метрические многообразия с распределением нулевой кривизны. Научные ведомости Белгородского Государственного университета. Серия: Математика. Физика, 6(255) (46): 36–43.

7. Галаев С.В. 2017. О распределениях со снециальной квази-сасакиевой структурой. Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1: Математика. Физика, 2(39): 6–17.

8. Галаев С.В., Гохман А.В. 2001. Почти симплектические связности на неголономном многообразии. Математика. Механика, 3: 28–31.

9. Гордеева П.А., Паньженский В.И., Степанов С.Е. 2009. Многообразия Римана-Картана, Итоги науки и техники (совр. мат-ка и ее прил-я), 123: 110–141.

10. Agricola I., Ferreira A.C. 2014 Einstein manifolds with skew torsion, Quart. J. Math., 65: 717–741.

11. Agricola I., Ferreira A.C., Friedrich Th. 2015. The classification of naturally reductive homogeneous spaces in dimensions $n \leq 6$. Differential Geom. Appl., 39: 59–92.

12. Bejancu A. 2012. Curvature in sub-Riemannian geometry. Journal of mathematical physics, 53, 023513.

13. Bukusheva A.V., Galaev S.V. 2011. Almost contact metric structures defined by connection over distribution. Bulletin of the Transilvania University of Brasov Series III: Mathematics, Informatics, Physics, 4(53),2: 13–22.

14. Falcon S., Plaza A. 2008. The k-Fibonacci hyperbolic functions. Chaos, Solitons, Fractals, 38(2): 409–420.

15. Falcon S., Plaza A. 2009. The metallic ratios as limits of complex valued transformations, Chaos, Solitons, Fractals, 41(1): 1–13.

16. Falcon S., Plaza A. 2009. On k-Fibonacci sequences and polynomials and their derivatives, Chaos, Solitons, Fractals, 39(3): 1005–1019.

17. Galaev S.V. 2018. Admissible Hyper-Complex Pseudo-Hermitian Structures. Lobachevskii Journal of Mathematics, 39(1): 71–76.

18. Galaev S.V. 2015. Intrinsic geometry of almost contact Kahlerian manifolds. Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis, 31(1): 35–46.

19. Goldberg S.I., Yano K. 1970. Polynomial structures on manifolds. Kodai Math. Sem. Rep., 22: 199–218.

References

1. Bukusheva A.V. 2015. O geometrii kontaktnyh metricheskih prostranstv s φ-svyaznost'yu [The geometry of the contact metric spaces φ-connection]. Scientific Bulletin of Belgorod State University. Ser. Mathematics. Physics, 17 (214) (40): 20–24.

2. Bukusheva A.V. 2016. Izometricheskie preobrazovaniya prodolzhennyh pochti kontaktnyh metricheskih struktur s metrikoj polnogo lifta [Isometric transformations of extended almost contact metric structures with a full lift metric]. Differentsialnaya geometriya mnogoobrazij figur, 47: 39-–47.

3. Bukusheva A.V. 2019. Klassifikaciya pochti kontaktnyh metricheskih struktur na raspredeleniyah s vnutrennej simplekticheskoj svyaznost'yu [Classification of almost contact metric structures on distributions with internal simplistic connectivity].Scientific Bulletin of Belgorod State University. Ser. Mathematics. Physics, 51(1): 20–24.

4. Bukusheva A.V., Galaev S.V. 2017. Geometriya pochti kontaktnyh giperkehlerovyh mnogoobrazij [Geometry of an almost contact hyper-Kahler manifolds]. Differentsialnaya geometriya mnogoobrazij figur, 48: 32—41.

5. Galaev S.V. 2016. Obobshchennyj tenzor krivizny Vagnera pochti kontaktnyh metricheskih prostranstv [Generalized Wagner's curvature tensor of almost contact metric spaces]. Chebyshevskii Sbornik, 17, 3(59): 53–63.

6. Galaev S.V. 2016. Dopustimye giperkompleksnye struktury na raspredeleniyah sasakievyh mnogoobrazij [Admissible hypercomplex structures on distributions of Sasakian manifolds]. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., 16 (3): 263–272.

7. Galaev S.V. 2017. Pochti kontaktnye metricheskie mnogoobraziya s raspredeleniem nulevoj krivizny [Almost contact metric manifolds with distribution of zero curvature]. Scientific Bulletin of Belgorod State University. Ser. Mathematics. Physics, 6(255), 46: 36–43.

8. Galaev S.V. 2017. O raspredeleniyah so special'noj kvazi-sasakievoj strukturoj [On Distributions with Special Quasi-Sasakian Structure]. Science Journal of VolSU. Mathematics. Physics, 2(39): 6—17.

9. Galaev S.V., Gokhman A.V. 2001. Pochti simplekticheskie svyaznosti na negolonomnom mnogoobrazii [Almost symplectic connections on nonholonomic manifold]. Matematika. Mekhanika, 3: 28–31.

10. Gordeeva, I.A., Panzhensky, V.I., Stepanov, S.E. 2009. Mnogoobraziya Rimana-Kartana [Riemann-Cartan manifolds]. Itogi nauki i tekhniki. M., 123, 110–141.

11. Agricola I., Ferreira A.C. 2014 Einstein manifolds with skew torsion, Quart. J. Math., 65: 717–741.

12. Agricola I., Ferreira A.C., Friedrich Th. 2015. The classification of naturally reductive homogeneous spaces in dimensions $n \leq 6$. Differential Geom. Appl., 39: 59–92.

13. Bejancu A. 2012. Curvature in sub-Riemannian geometry. Journal of mathematical physics, 53, 023513.

14. Bukusheva A.V., Galaev S.V. 2011. Almost contact metric structures defined by connection over distribution. Bulletin of the Transilvania University of Brasov Series III: Mathematics, Informatics, Physics, 4(53),2: 13–22.

15. Falcon S., Plaza A. 2008. The k-Fibonacci hyperbolic functions. Chaos, Solitons, Fractals, 38(2): 409–420.

16. Falcon S., Plaza A. 2009. The metallic ratios as limits of complex valued transformations, Chaos, Solitons, Fractals, 41(1): 1–13.

17. Falcon S., Plaza A. 2009. On k-Fibonacci sequences and polynomials and their derivatives, Chaos, Solitons, Fractals, 39(3): 1005–1019.

18. Galaev S.V. 2018. Admissible Hyper-Complex Pseudo-Hermitian Structures. Lobachevskii Journal of Mathematics, 39(1): 71–76.

19. Galaev S.V. 2015. Intrinsic geometry of almost contact Kahlerian manifolds. Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis, 31(1): 35–46.

20. Goldberg S.I., Yano K. 1970. Polynomial structures on manifolds. Kodai Math. Sem. Rep., 22: 199–218.

Ссылка для цитирования статьи
For citation

Галаев С.В. 2019. Золотое сечение в геометрии η-Эйнштейновых субримановых многообразий с n-связностью. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика.51 (4): 465–474. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-465-474

Galaev S.V. 2019. Golden ration in geometry of η-Einstein sub-riemannian manifolds with n-connection. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (4): 465–474 (in Russian). DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-465-474